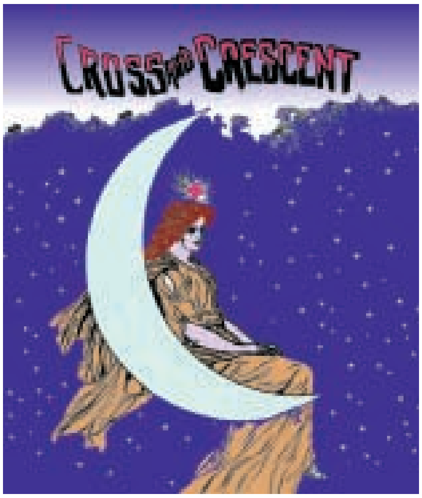


Les découpages artistiques

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les amateurs perspicaces et avisés découvrent encore aujourd'hui de nouvelles constructions géométriques.

Les découpages géométriques passionnent professionnels et amateurs. La gageure consiste à transformer, avec le nombre minimal de coups de ciseaux et en réarrangeant les morceaux, une forme en une autre. Le grand classique du découpage est l'ouvrage de Harry Lindgren *Recreational Problems in Geometric Dissections and How to Solve Them*, paru en 1964, puis complété et republié en 1972. En dehors de sa passion pour la géométrie et son métier d'agent de brevets, Harry Lindgren fut jusqu'à sa mort, en 1992, l'ardent défenseur d'une réforme radicale de l'orthographe anglaise qu'il souhaitait fondée sur un système phonétique rigoureux. Que n'a-t-il fait école !

Depuis 1972, de nombreux ajouts ayant fait progresser l'art populaire des dissections, une nouvelle synthèse s'imposait. Le livre de Greg Frederickson paru récemment sous le titre *Dissection : Plane and Fancy* est le recueil attendu. Sa réalisation est d'une remarquable qualité, tant sur le plan des informations que l'auteur est allé rechercher patiemment dans toutes sortes de publications, pour la plupart inaccessibles, que pour les belles illustrations qui nous font découvrir à chaque page des constructions astucieuses et élégantes. Ce livre prouve que l'ingéniosité des amateurs de récréations mathématiques engendre des merveilles esthétiques et d'authentiques énigmes difficiles. Le découpage du croissant de lune en croix grecque et en carré *(voir la figure 1)* est un classique du genre perfectionné par les deux frères rivaux du découpage, Sam Lloyd (1841-1911) et Henry Dudeney (1857-1930).

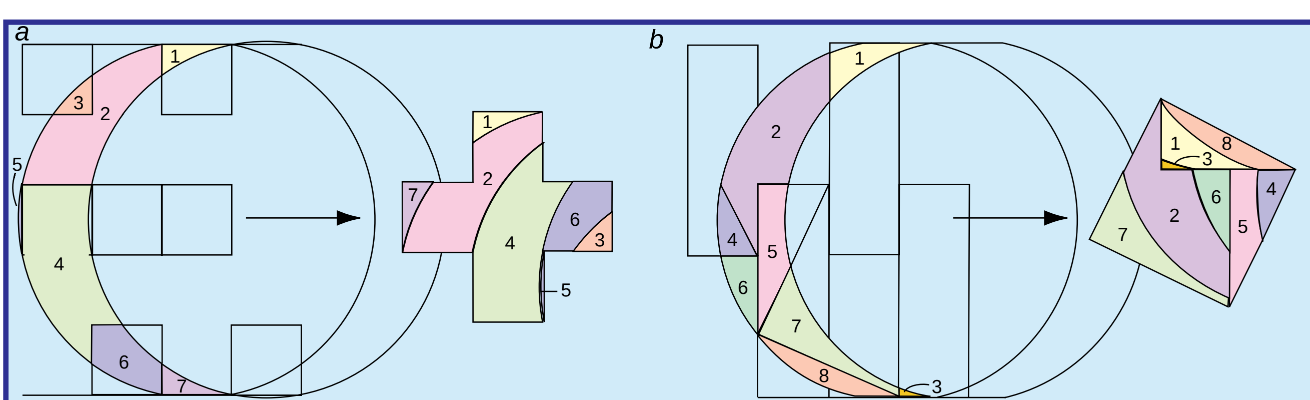
Les thèmes du découpage des figures à bords arrondis et celui des polyèdres retiendront notre attention. Assez étrangement, les résultats généraux de M. Laczkovich, S. Banach et A. Tarski sur les découpages ensemblistes utilisant l'axiome du choix ne sont pas mentionnés dans le livre de G. Frederickson, qui n'a voulu retenir que les découpages effectifs. Nous les évoquerons.

Il est évident que, si en découpant un polygone *A* en un nombre fini de morceaux polygonaux et en les recombinant, on reconstitue un polygone *B*, alors les polygones *A* et *B* ont des aires égales. Moins évidente est la propriété réciproque : si deux polygones *A* et *B* ont des aires égales, alors on peut toujours découper le premier en un nombre fini de polygones qui se recombineront pour former le second. C'est le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwein (démontré indépendamment plusieurs fois au XIXe siècle) : deux polygones sont décomposables par dissection polygonale, si et seulement si, ils ont la même aire *(voir la figure 2)*.

La démonstration générale donne des découpages comprenant un trop grand nombre de pièces, aussi en cherche-t-on d'autres plus économiques. C'est la source d'une multitude de casse-tête géométriques : les records sont régulièrement battus, parfois au grand dam des spécialistes qui pensaient impossible d'améliorer leur solution !

Tel est le cas de la transformation proposée par Lindgren du décagone en carré, qui était déjà miraculeusement réalisée avec huit pièces seulement et que l'amateur anglais Gavin Theobald améliora en un découpage de sept pièces *(voir la figure 3)*.

Lorsque l'on considère non plus des polygones mais des figures à bords



1. Transformations du croissant de lune. Le dessin *a* donne une solution en sept pièces de la transformation du croissant en croix grecque. Le croissant de lune utilisé possède une hauteur égale à cinq fois la largeur. La construction résulte d'une correction apportée par G. Frederickson à une solution inexacte proposée par Sam Lloyd. Le croissant de lune auquel s'intéressa H. Dudeney est légèrement différent : sa hauteur est égale à quatre fois sa largeur. Le dessin *b* montre un découpage en huit pièces du croissant de Lloyd conduisant au carré.

curvilignes, par exemple des arcs de cercles *(voir la figure 4)*, le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwein n'assure plus qu'un découpage existe, et il faut y croire pour réussir...

Pourtant l'idée des «découpages-recompositions» était une des méthodes utilisées par les Grecs pour «quarrer» des surfaces à bords curvilignes. «Quarrer» une aire signifie la calculer en ramenant la figure initiale à celle d'un carré. Ces figures aux bords curvilignes qu'on peut quarrer étaient appelées des lunules, et les Grecs savaient que certains découpages étaient difficiles, voire impossibles.

Deux quadratures du cercle

Le fameux problème de la quadrature du cercle est attribué à Anaxagore. Alors qu'il était emprisonné pour avoir soutenu que la Lune ne faisait que refléter la lumière du Soleil, il se serait posé, il y a 25 siècles, la question de mettre en relation un cercle et un carré de même aire. On peut interpréter l'expression *quadrature du cercle* de deux façons différentes. La première, que nous appellerons le problème classique de la quadrature du cercle, se formule ainsi : est-il possible, en n'utilisant que la règle et le compas, de tracer un carré de la même aire qu'un cercle donné?

Résoudre le problème équivaut à tracer à la règle et au compas un segment de longueur π à partir de la donnée d'un segment de longueur 1, ce qui ne serait possible que si π était exprimable par radicaux carrés (comme $\sqrt{2} + \sqrt{5/1} + \sqrt{17}$). Cela impliquerait que π est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, ce qui n'est pas le cas, puisque π est un nombre transcendant, comme Ferdinand von Lindemann l'a prouvé en 1882.

La seconde interprétation, que nous dénommerons problème de la quadrature du cercle par découpages, est la suivante : est-il possible de découper un cercle (on devrait dire un disque) en un nombre fini de morceaux – auxquels on n'impose pas d'être traçables à la règle et au compas – de façon qu'en recombinant les morceaux on obtienne un carré de même aire? Recombiner signifie déplacer les morceaux sans les déformer, en leur appliquant uniquement des translations, des rotations ou des symétries.

Ce problème, posé par le grand logicien polonais Alfred Tarski en 1952, sera résolu plus vite que son ancêtre classique. Sa solution complète est à la fois étonnante et décevante. Elle comporte deux volets.

Avec des ciseaux ou avec des ensembles ?

Si l'on impose aux morceaux du découpage d'être des formes géométriques limitées par des arcs de courbes régulières (cas du découpage aux ciseaux), alors L. Dubins, M. Hirsch et J. Karush ont établi en 1963 que la réponse est négative : la quadrature du cercle par découpage aux ciseaux est impossible. Il découle de leur théorème que vous ne pourrez donc pas décomposer aux ciseaux un cercle en une autre figure convexe, de type carré, triangle, œuf, ovale ou polygone régulier.

En revanche – et c'est le second volet de la réponse au problème de quadrature par découpage de Tarski –, si l'on accepte que les morceaux puissent être des sous-ensembles quelconques du disque original, alors la réponse est positive. Cela découle d'un résultat de M. Laczkovich, qui propose d'ailleurs une recomposition du carré en n'effectuant que des translations à partir des pièces du disque découpé : la quadrature du cercle par découpage ensembliste est possible et ne nécessite que des translations. Le résultat de M. Laczkovich énonce aussi que, si deux polygones

2. Théorème de Wallace-Bolyai-Gerwein

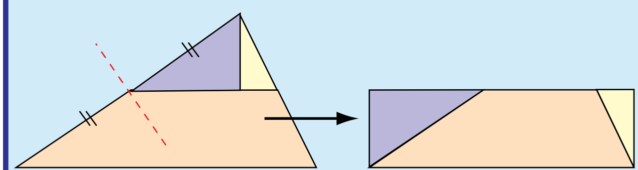
Deux polygones de même aire peuvent être transformés l'un en l'autre par dissection polygonale.

Démonstration

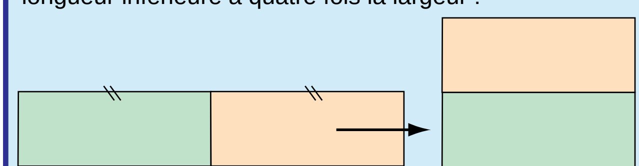
Pour transformer deux polygones de même aire l'un en l'autre par dissection polygonale, suivre les instructions suivantes.

– (1) Découper le premier polygone en triangles.

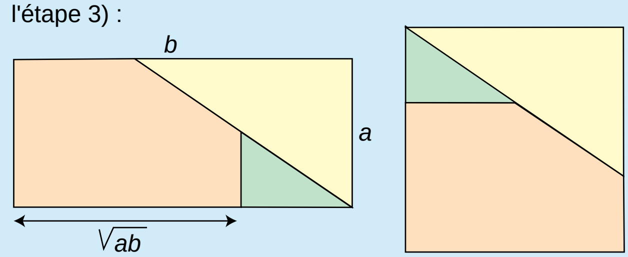
– (2) Transformer chaque triangle en un rectangle (ce découpage s'applique à tout triangle, car dans tout triangle au moins l'une des hauteurs coupe le côté opposé) :



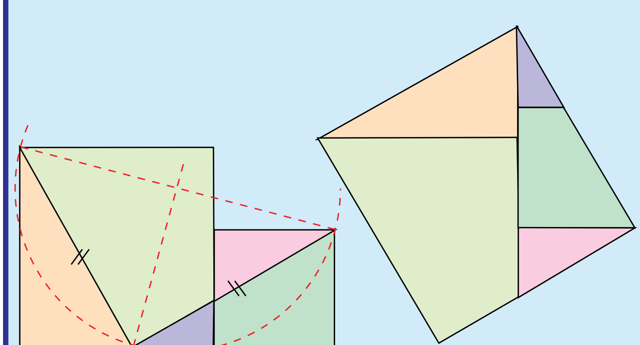
– (3) Transformer les rectangles ayant une longueur plus grande que quatre fois la largeur en rectangles ayant une longueur inférieure à quatre fois la largeur :



– (4) Transformer chaque rectangle en carré (cette construction ne fonctionne que si la longueur est inférieure à quatre fois la largeur, d'où la nécessité de l'étape 3) :

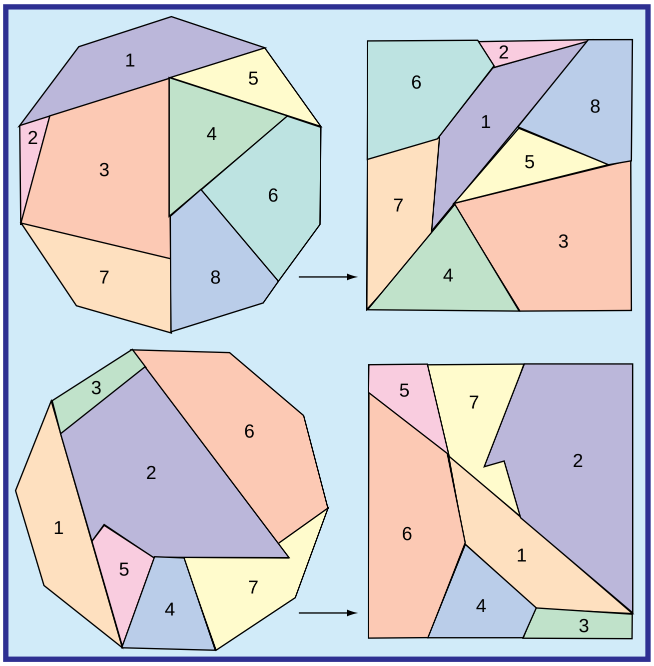


– (5) Fusionner les carrés, deux par deux, progressivement, jusqu'à avoir un unique grand carré :

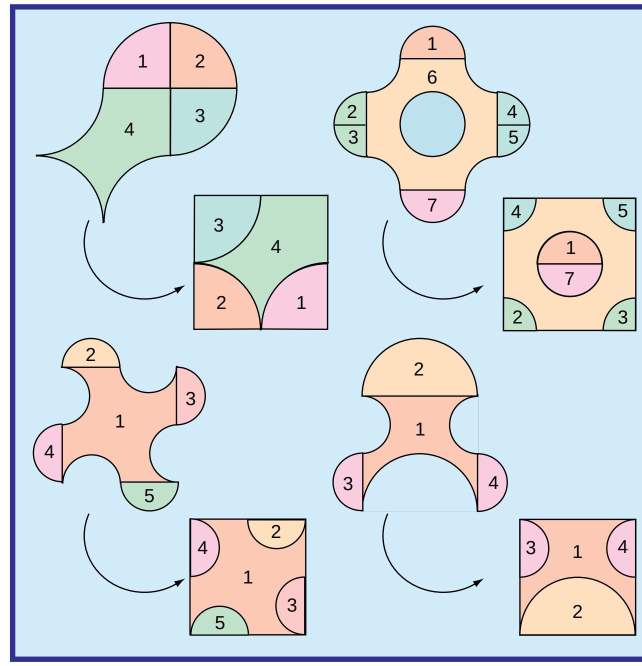


– (6) Opérer de la même façon pour le second polygone.

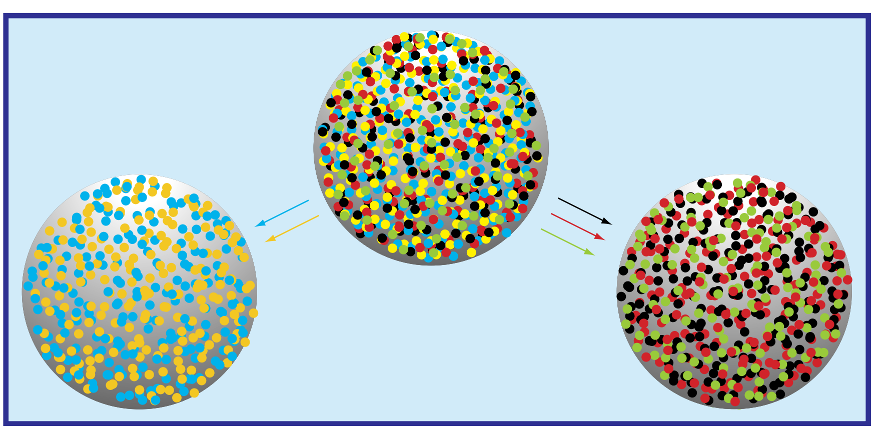
– (7) Superposer les découpages intervenus pour transformer le polygone 1 en carré à ceux obtenus pour transformer le polygone 2 en carré. Par construction, les pièces obtenues permettent de reconstituer le polygone 1 et le polygone 2.



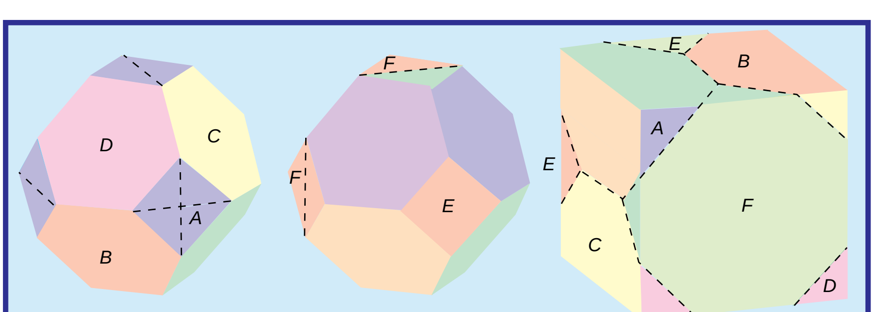
3. Record de découpage. Dans son livre de 1964, le champion mythique des découpages Harry Lindgren propose un découpage du dodécagone en carré n'utilisant que huit pièces. Son digne successeur, Gavin Theobald, a réussi le miracle de gagner une pièce. Il est très rare qu'on puisse établir qu'un découpage est optimal ; ici, il paraît invraisemblable qu'on puisse encore gagner une pièce, mais qui sait?



4. Les Grecs utilisaient des découpages pour évaluer l'aire de morceaux du plan, y compris ceux dont des bords sont curvilignes. Voici des formes appelées lunules dont le découpage permet de calculer l'aire en la ramenant à celle d'un carré. Hippocrate de Chio, vers 430 avant J.-C. voulait «quarrer le cercle». Pour cela, il s'intéressa à la quadrature des lunules, qui, pensait-il, le conduirait à la solution.



5. La décomposition paradoxale de la sphère ou le paradoxe de Banach-Tarski. Une sphère pleine est composée de points jaunes, bleus, verts, rouges, noirs. Il est possible en déplaçant les points de cette sphère, stipule le théorème, de constituer une sphère pleine composée de points jaunes et bleus et une autre sphère pleine composée de points verts, rouges et noirs. Lors du déplacement, la distance mutuelle de deux points d'une même couleur ne change pas. Les mathématiciens ont démontré que le nombre de sous-ensembles est au minimum égal à 5, correspondant aux cinq couleurs représentées ici.



6. David Paterson et Anton Hanegraaf ont, indépendamment, remarqué qu'on pouvait disséquer un cube en six pièces pour obtenir deux octaèdres tronqués.

quelconques ont la même aire, on peut découper le premier, déplacer ses pièces en n'effectuant que des translations et recomposer le second.

Géométrie ensembliste

De tels découpages théoriques n'ont aucune traduction physique, et aucune figure de cet article ne vous donnera une idée des pièces de M. Laczkovich qui réalisent la quadrature du cercle. Pourquoi? Parce que la preuve de leur existence utilise l'axiome du choix et que les pièces des découpages sont d'une telle complexité – pire que les fractales! – qu'on ne peut pas les représenter de façon réaliste. De surcroît, le «découpage» du disque de M. Laczkovich comporte plus de 10^{50} pièces!

On sait que l'axiome du choix fut l'objet d'âpres discussions lors de la mise au point de la théorie des ensembles et de son adoption par les mathématiciens du début du XXe siècle. Rappelons que l'axiome du choix affirme que, si *E* est un ensemble non vide d'ensembles non vides alors on peut constituer un nouvel ensemble en choisissant un élément dans chaque ensemble de *E*. Ainsi, à partir de l'ensemble $E = \{\{a,b\},\{e,f\},\{g,h\},\{i,j\}\}$, on obtient par choix $\{a,f,h,j\}$. L'axiome du choix ne crée de difficultés que lorsque *E* est infini, ce qui est le cas en géométrie.

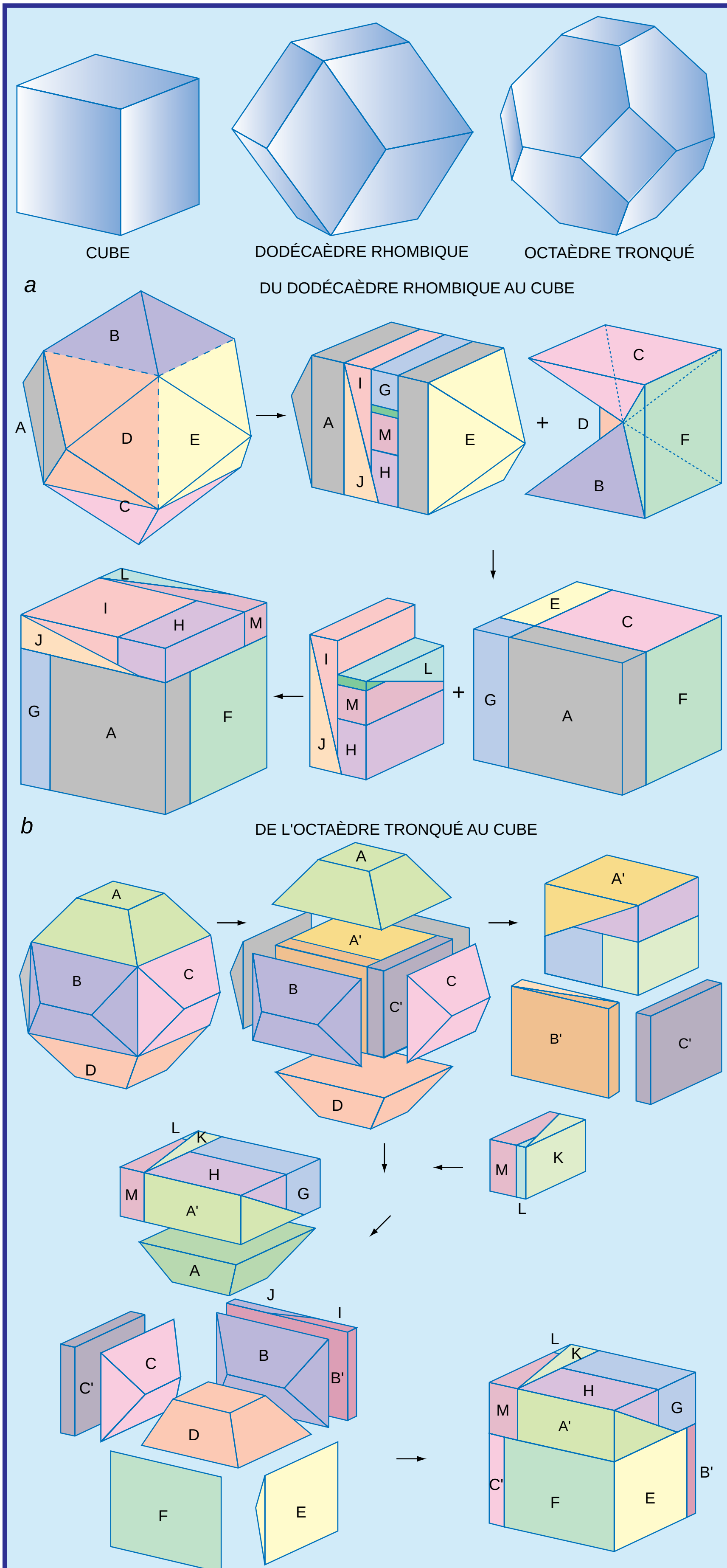
Ce n'est pas la première fois que les problèmes de découpage mettent le mathématicien utilisateur de l'axiome du choix dans une position inconfortable : le paradoxe de Banach-Tarski est un autre exemple de cette situation. Pour l'expliquer, examinons le cas des découpages dans l'espace.

Découpage dans l'espace

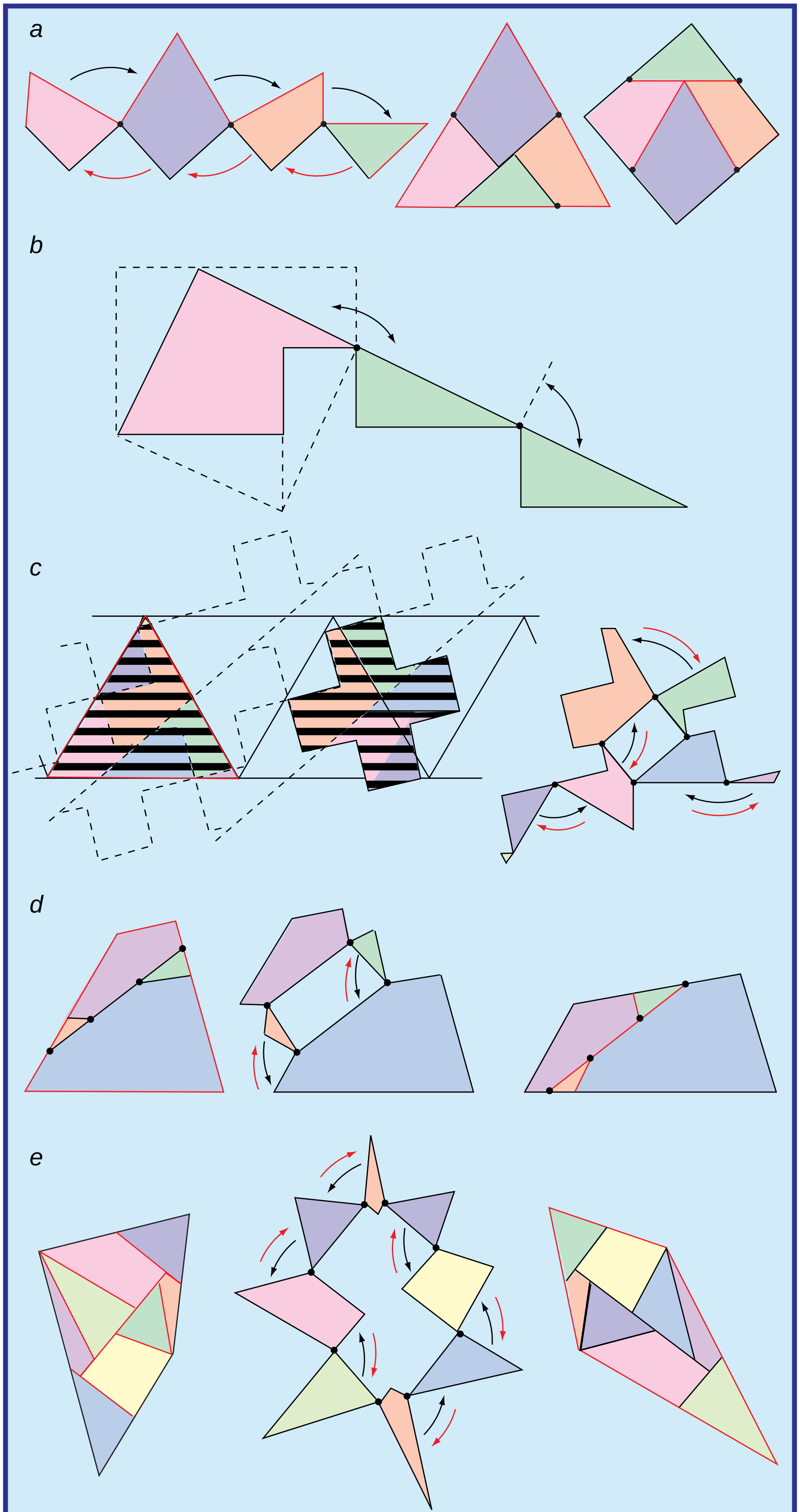
Le passage à la dimension trois change entièrement la situation. D'abord, en dimension trois, il n'existe aucun théorème général équivalant à celui de Wallace-Bolyai-Gerwein. On sait au contraire, depuis presque un siècle, que certains polyèdres ne sont pas décomposables par dissection polyédrale en d'autres.

La décomposition par dissection polyédrale du tétraèdre régulier était l'objet du troisième problème posé par Hilbert en 1900, parmi 23 dont le dixième sur les équations diophantiennes a été évoqué dans la rubrique du mois de février. Ce troisième problème a été résolu le premier : avant la fin de l'année 1900, Max Dehn avait associé un coefficient à chaque polyèdre et montré que ce coefficient ne changeait pas quand on procède à une dissection polyédrale. Cette propriété d'invariance du coefficient (appelé invariant de Dehn) implique que deux polyèdres qui n'ont pas le même coefficient ne sont pas décomposables par dissection polyédrale l'un en l'autre. Jean-Pierre Sydler, en 1965, a prouvé qu'avoir le même invariant de Dehn était non seulement nécessaire, mais aussi suffisant pour que deux polyèdres soient décomposables par dissection polyédrale l'un en l'autre. En calculant l'invariant de Dehn des cinq polyèdres réguliers (tétraèdre, octaèdre, cube, dodécaèdre, icosaèdre), on constate qu'ils sont tous différents, et donc aucun découpage en polyèdres plus petits ne permet de passer de l'un d'eux à un autre.

Le passage à la dimension trois change aussi la dissection ensembliste : alors qu'à deux dimensions la dissection conservait les aires, il n'est plus vrai qu'une dissection transforme un polyèdre en un autre polyèdre de même volume. Pire, et c'est le paradoxe de Banach-Tarski, une sphère peut être décomposée en un nombre fini de morceaux, qui, une fois déplacés (sans déformation), se recomposent en deux sphères identiques à la sphère de départ! *(voir la figure 5).* Vous partez d'une sphère en or et, par cette transformation, vous



7. Le cube, l'octaèdre tronqué et le dodécaèdre rhombique sont équivalents par dissection polyédrale. Ces deux dissections en 13 pièces ont été découvertes récemment par Anton Hanegraaf. La première *(a)* fait passer du dodécaèdre rhombique au cube, la seconde *(b)* de l'octaèdre tronqué au cube.



8. Les découpages avec des charnières en dimension 2. ***(a)*** **La chaîne due à Dudeney, qui permet de réaliser un carré** ***(flèches rouges)*** **ou un triangle équilatéral** ***(flèches noires)*** **et donc de passer de l'un à l'autre.** ***(b)*** **La transformation de deux carrés côte à côte en un seul (utilisée dans la démonstration du théorème de Wallace-Bolyai-Gerwein) peut se faire en utilisant des pièces liées les unes aux autres.** ***(c)*** **Un fantastique découpage permettant de passer de la croix grecque au triangle équilatéral avec cinq pièces solidaires.** ***(d)*** **et** ***(e)*** **Des transformations de quadrilatères variés par découpages avec charnières.**

doublez son volume : vos problèmes de fin de mois sont résolus.

Plus généralement, une sphère peut être transformée en un cube quels que soient les volumes de la sphère initiale et ceux du cube final. Plus fort encore, si deux parties *A* et *B* de l'espace sont de taille bornée et contiennent chacune au moins une sphère de rayon positif, alors on peut décomposer *A* en un nombre fini de morceaux qui, après déplacement, reconstitueront *B*.

Paradoxes et contradictions

Ces découpages paradoxaux, découverts en 1924 par les mathématiciens polonais Stephan Banach et Alfred Tarski, choquent profondément le sens commun ; pourtant, il n'y a pas «paradoxe» au sens strict : aucune contradiction n'est introduite dans la théorie des ensembles. Ces découpages montrent seulement que le monde du continu mathématique et les conséquences de l'axiome du choix ne correspondent pas à nos attentes intuitives. Le nombre de pièces pour dédoubler une sphère en deux sphères de même volume est cinq, et il est impossible de faire moins ; ce paradoxe de Banach-Tarski existe aussi dans les espaces de dimension supérieure à trois.

Les logiciens qui ont développé des outils puissants d'analyse des démonstrations mathématiques ont établi que sans l'axiome du choix, on ne pourrait pas effectuer le dédoublement miraculeux de la sphère. C'est donc bien cet axiome du choix qui est en cause. De plus, K. Gödel a prouvé, il y a 60 ans, que la théorie des ensembles avec l'axiome du choix est contradictoire si, et seulement si, celle sans l'axiome du choix l'est (autrement dit : on n'a pas plus de risque de contradiction avec que sans). Aussi personne n'a envie de se priver d'un outil si commode, même si le monde mathématique ainsi créé est un monde étrange où l'intuition géométrique est malmenée.

Reposons maintenant les pieds sur terre et revenons-en aux découpages tridimensionnels polyédraux qui seuls d'ailleurs intéressent les amateurs de géométrie.

Une question de Gauss sur les polyèdres

En 1844, Gauss se lamentait, dans une lettre au mathématicien Christian Ludwig Gerling, qu'il faille utiliser l'infini pour démontrer que deux polyèdres symétriques possèdent le même volume.

Une méthode consiste *(1)* à découper le premier polyèdre en tranches parallèles fines dont on inverse l'ordre, puis *(2)* à faire tendre le nombre de tranches vers l'infini. Ne pouvait-on pas éviter ce passage par l'infini pour une question aussi géométrique et aussi simple? Gerling lui répondit quelques jours plus tard qu'il suffisait de découper les deux polyèdres symétriques en tétraèdres (ceux provenant du premier polygone seront symétriques de ceux provenant du second) et de savoir transformer par dissection polyédrale un tétraèdre en son symétrique, transformation dont il montrait la possibilité. Pour cette transformation d'un tétraèdre quelconque en son symétrique, Gerling proposait un découpage en 12 morceaux, qui depuis a été amélioré en un découpage en six morceaux. Le problème de Gauss était résolu.

Dodécaèdre rhombique

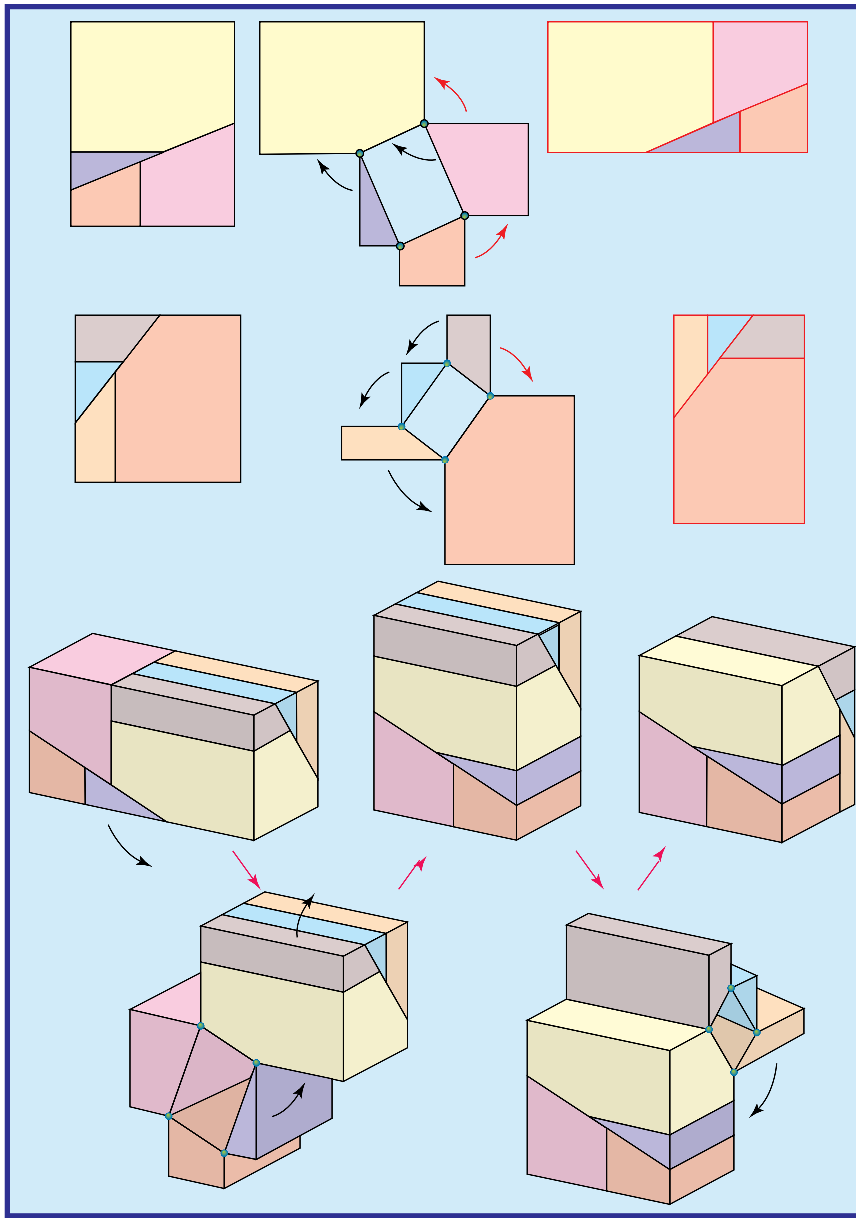
Malgré le résultat négatif de Dehn selon lequel le tétraèdre régulier ne peut se décomposer en polyèdres redonnant un cube, certains polyèdres peuvent se transformer en d'autres par dissection polyédrale, et c'est à ce jeu délicat que s'adonnent les amateurs. Le dodécaèdre rhombique (à ne pas confondre avec le dodécaèdre régulier, qui a des faces pentagonales) est un polyèdre très sympathique, car il peut paver l'espace. Il possède 12 faces identiques, chacune ayant la forme d'un losange dont les diagonales sont dans un rapport égal à $\sqrt{2}$.

On sait transformer deux cubes identiques par dissection polyédrale en un dodécaèdre rhombique. Pour nous exercer à la pensée géométrique sans figure, imaginons ce découpage dans notre tête : divisons le premier cube en six pyramides identiques à base carrée, chacune ayant comme socle une face du cube et chacune ayant comme pointe le centre du cube. Collons maintenant les six pyramides sur les faces du second cube : nous obtenons le dodécaèdre rhombique.

Un autre découpage polyédral simple fait passer d'un octaèdre tronqué à un cube *(voir la figure 7).* Parmi les rares résultats concernant les polyèdres, le plus remarquable est que l'octaèdre tronqué, le dodécaèdre rhombique et le cube sont équivalents par dissection polyédrale *(voir la figure 7).*

On transforme aussi un parallélépipède $2 \times 1 \times 1$ en un cube (de côté $2^{1/3}$) d'une manière particulièrement astucieuse, de façon qu'un système de charnières maintienne toutes les pièces du découpage solidaires durant les opérations de transformation. Cette magnifique création est due à Anton Hanegraaf, un passionné de puzzles mathématiques qui fut l'éditeur, de 1987 à 1993, de la revue des amateurs de casse-tête appelée *Cubism for Fun* (dont l'adresse actuelle est : CCF, Rik van Grol, Hilvoordestraat 14, 2284 BK Rijswijk, Pays-Bas).

La réalisation matérielle de ces formes géométriques, aussi éternelles que celles auxquelles les pythagoriciens s'intéressaient, donnerait naissance à de très originaux et magnifiques casse-tête, et s'ils étaient fabriqués, je suis certain que de nombreux lecteurs seraient intéressés!



9. Le découpage articulé qui fait passer du parallélépipède $2 \times 1 \times 1$ au cube. Deux découpages avec charnières (permettant de transformer des rectangles) donnent le remarquable découpage articulé de A. Hanegraaf transformant un double cube en un seul.

Jean-Paul Delahaye est professeur à l'Université de Lille. e-mail : delahaye@lifl.fr

L. Dubins, M. Hirsch et J. Karush, *Scissor Congruence,* in *Israel Journal of Mathematics*, 1, pp. 239-247,1963.

G. Frederickson, *Dissections : Plane and Fancy*, Cambridge University Press, 1997.

V. Klee et S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory,* Mathematical Association of America, 1991.

M. Laczkovich, *Equidecomposability and Discrepancy : a Solution of Tarski's Circle-squaring Problem*, in *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 404, pp. 77-117, 1990.

H. Lindgren, *Recreational Problems in Geometric Dissections and How to Solve Them,* Revised and enlarged edition, Dover Publications, New York, 1972.

I. Stewart, *Dissections et métamorphoses*, in *Pour La Science*, pp. 96-97, janvier 1998.

S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1987.